

Produit tensoriel

Maouche Henen

9 juillet 2019

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Mr. **Midoune Nour Eddine** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr. **Ferahtia Nassim**, professeur à l'université de Msila pour m'avoir fait l'honneur de mon jury.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr. **Boudaoud Abd Elmajid**, professeur à l'université de Msila pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr. **Benmeddour Rabeh**, professeur à l'université de Msila pour m'avoir fait l'honneur de mon jury.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr. **Boudaoud Said**.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr. **Rakdi Mohamed Anour**.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents mon père et ma mère, à mon frère **Adel** et **Tarek**, à mes soeurs **Rrachida**, **Fayza**, **Dalila**, **Safiya**, qui s'ont toujours encouragé.

J'exprime ici à toute la famille et mes amies.

Je remercie tous les professeurs du département de mathématiques, sans oublier aussi mes collègues, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	1
1 Le produit tensoriel des K-espaces vectoriels	2
1.1 Problème de factorisation des applications bilinéaires	2
1.2 Construction du produit tensoriel	4
1.3 Propriétés basiques	6
1.4 Produit tensoriel d'applications linéaires	11
1.5 Distributivité du produit tensoriel sur les sommes directes .	12
1.6 Produit tensoriel d'espaces vectoriels munies de bases	15
1.7 Produit tensoriel des matrices	15
1.8 Quelques exemples	19
2 Produit extérieur d'un K- espace vectoriel	24
2.1 Lien avec les applications multilinéaires alternées	24
2.2 Algèbre extérieure d'une somme directe finie	30
2.3 Déterminant sur le produit extérieur	32
Conclusion	34
Bibliographie	34

Introduction

En 1900, Ricci et Levi-Civita ont donné le premier exposé systématique relatif au calcul tensoriel. Dans cet ouvrage, les auteurs ont attiré l'attention des mathématiciens et des physiciens sur un certain nombre d'applications de cette théorie mathématique. Depuis, l'apparition de la théorie de la relativité, qui n'a été possible que grâce à l'existence préalable du calcul tensoriel, lui a fait réaliser par contre coup d'immenses progrès. Ce calcul est devenu l'un des instruments essentiels de toute la physique théorique moderne.

L'étude du calcul tensoriel peut être réalisée au sein d'un cadre mathématique formel, à l'aide de définitions et de démonstrations plus ou moins compliquées. Mais le calcul tensoriel est aussi un outil très pratique pour l'écriture et l'étude des équations servant à décrire des phénomènes physiques. En effet, les lois physiques ne sont valables que si elles sont indépendantes de tout système de coordonnées particulier utilisé pour les représenter mathématiquement. Il est ainsi très commode d'utiliser l'analyse tensorielle en relativité générale, en géométrie différentielle, en mécanique, en thermodynamique, et dans de nombreuses autres branches de la science ou de la technologie, et il n'est pas nécessaire pour cela de connaître l'ensemble des fondements mathématiques de la théorie.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de produit tensoriel : définitions et propriétés, ainsi que le produit extérieur.

Ce travail est composé de deux chapitres : dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base concernant la construction du produit tensoriel, (nous donnons quelques exemples d'applications).

Dans le deuxième chapitre : on s'intéresse au produit extérieur qui est très liée au produit tensoriel.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Le produit tensoriel des K -espaces vectoriels

1.1 Problème de factorisation des applications bilinéaires

Soient K un corps commutatif et M, N, R des K -espaces vectoriels.

On regarde les applications K -bilinéaires φ de $M \times N$ vers R , i.e., qui vérifient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(am, n) & = & \varphi(m, an) = a\varphi(m, n) \\ \varphi(m + m', n) & = & \varphi(m, n) + \varphi(m', n) \\ \varphi(m, n + n') & = & \varphi(m, n) + \varphi(m, n') \end{array} \right.$$

On note $Bil_K(M, N, R)$ ou $Bil(M, N, R)$ l'ensemble des applications K -bilinéaires de $M \times N$ dans R , et $\mathcal{L}(M, N)$ les homomorphismes de K -espace vectoriel de M dans N , i.e., les applications K -linéaires de M dans N .

Nous allons représenter linéairement les applications bilinéaires.

Pour se faire, étant donnés deux espaces vectoriels M et N , nous allons construire un espace vectoriel P (dépendant de M et N) de façon à pouvoir identifier $Bil(M, N, \cdot)$ et $\mathcal{L}(P, \cdot)$ pour tout espace vectoriel.

Plus précisément, on s'intéresse au problème suivant : étant donnés M et N , trouver un K -espace vectoriel P et une application K -bilinéaire $\pi: M \times N \longrightarrow P$ telle que, pour tout K -espace vectoriel R et pour toute application K -bilinéaire

$\varphi: M \times N \longrightarrow R$, il existe une unique application K -linéaire $\bar{\varphi}: P \longrightarrow R$ telle que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\varphi} & \\ P & & \end{array}$$

Le procédé $\varphi \longmapsto \bar{\varphi}$ donnera l'application linéaire $Bil(M, N, R) \longrightarrow \mathcal{L}(P, R)$ cherchée.

Observons déjà que, si un tel couple (P, π) existe, alors P est unique à isomorphisme près.

Soit (P', π') un autre tel couple. π' est une application bilinéaire de $M \times N$ dans P' , donc d'après les propriétés de (P, π) il existe une application linéaire $\bar{\pi}': P \longrightarrow P'$ telle que $\pi' = \bar{\pi}' \circ \pi$. De même, π est une application bilinéaire de $M \times N$ dans P , donc d'après les propriétés de (P', π') il existe une application linéaire $\bar{\pi}: P' \longrightarrow P$ telle que $\pi = \bar{\pi} \circ \pi'$.

Nous représentons les quatre applications π , π' , $\bar{\pi}$ et $\bar{\pi}'$ sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & M \times N & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ & \xrightarrow{\bar{\pi}'} & \\ P & & P' \\ & \xleftarrow{\bar{\pi}} & \end{array}$$

On y lit les égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = \bar{\pi} \circ \pi' = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}' \circ \pi = (\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi \\ \pi' = \bar{\pi}' \circ \pi = \bar{\pi}' \circ \bar{\pi} \circ \pi' = (\bar{\pi}' \circ \bar{\pi}) \circ \pi' \end{array} \right.$$

Ou, π est une application bilinéaire de $M \times N$ dans P , donc d'après les propriétés de (P, π) il existe une unique application linéaire $\tilde{\pi} : P \longrightarrow P$ telle que $\pi = \tilde{\pi} \circ \pi$.

Puisque l'identité convient et que $\pi = (\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi$, on en déduit $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = Id_P$, on a de même $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = Id_{P'}$.

On en déduit que $\bar{\pi}$ est bijectif, d'où un isomorphisme de P' sur P .

L' isomorphisme ci-dessus est en fait unique si l'on impose qu'il commute avec π et π' .

En effet, si $f : P \longrightarrow P'$ est un morphisme vérifiant $\pi' = f \pi$, alors f est l'unique application $\bar{\pi}'$ définie ci-dessus.

Remarque 1.1

Sachant à présent qu'une solution (P, π) à notre problème est unique.

1.2 Construction du produit tensoriel

Soit E le K -espace vectoriel de base $M \times N$, i.e., l'ensemble des combinaisons formelles $\sum \lambda_{m,n} (m, n)$ à support fini.

Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par les

$$\begin{aligned} (m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\ (am, n) - a(m, n) \\ (m, an) - a(m, n) \end{aligned}$$

et considérons le K -espace vectoriel quotient E / F .

En notant $\bar{\xi}$ la classe d'un élément ξ , on a alors

$$\begin{aligned} \overline{(am, n)} &= \overline{(am, n) - a(m, n) + a(m, n)} \\ &= \overline{(am, n) - a(m, n)} + \overline{a(m, n)} \\ &= \bar{0} + \overline{a(m, n)} \\ &= \overline{a(m, n)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{(m + m', n)} &= \overline{(m + m', n) - (m, n) - (m', n) + (m, n) + (m', n)} \\
&= \overline{(m + m', n) - (m, n) - (m', n)} + \overline{(m, n) + (m', n)} \\
&= \overline{0} + \overline{(m, n)} + \overline{(m', n)} \\
&= \overline{(m, n)} + \overline{(m', n)}
\end{aligned}$$

avec des propriétés similaires à droite. La projection canonique

$$\pi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & E / F \\ (m, n) & \longmapsto & \overline{(m, n)} \end{cases}$$

est donc une application bilinéaire.

Soit ensuite $\varphi : M \times N \longrightarrow R$ bilinéaire. Elle détermine une application linéaire

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} E & \longrightarrow & R \\ \sum_{finie} \lambda_{m,n} (m, n) & \longmapsto & \sum \lambda_{m,n} \varphi (m, n) \end{cases}$$

via les images de la base et, puisque φ est bilinéaire, $\tilde{\varphi}$ s'annule sur F , i.e.

$F \subset \text{Ker } \tilde{\varphi}$, donc $\tilde{\varphi}$ passe au quotient, d'où une application linéaire

$$\overline{\varphi} : \begin{cases} E / F & \longrightarrow & R \\ \overline{(m, n)} & \longmapsto & \tilde{\varphi} (m, n) \end{cases}$$

Par construction, on a bien $\overline{\varphi} \circ \pi (m, n) = \overline{\varphi} (\overline{(m, n)}) = \tilde{\varphi} ((m, n)) = \varphi (m, n)$, d'où $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ comme voulu. De plus, $\overline{\varphi}$ est unique car on connaît les images des $\pi (m, n)$ qui engendrent E / F .

On notera

$$E / F = M \otimes_K N \text{ ou } M \otimes_K N,$$

ce que l'on prononce $\ll M \text{ tensoriel } N \gg$ ou $\ll M \text{ tenseur } N \gg$.

L'espace vectoriel $M \otimes_K N$ est ainsi une solution à notre problème universel, et on l'appellera le **produit tensoriel** de M par N (au-dessus de K).

Noter que, en tant que K -espace vectoriel, le produit tensoriel

$$M \otimes_K N = \pi(E) = \pi(\prec M \times N \succ) = \prec \pi(M \times N) \succ \text{ est engendré par les } \pi(m, n) = \overline{(m, n)}.$$

On notra désormais

$$\overline{(m, n)} = m \otimes_K n \text{ ou } m \otimes n$$

pour ces générateurs, que l'on appellera également tenseurs purs.

1.3 Propriétés basiques

Puisque $\pi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \\ (m, n) & \longmapsto & m \otimes n \end{cases}$ est bilinéaire, on a immédiatement les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (m + m') \otimes n = (m \otimes n) + (m' \otimes n) \\ m \otimes (n + n') = (m \otimes n) + (m \otimes n') \\ (am) \otimes n = m \otimes (an) = a(m \otimes n) \end{cases}$$

On en déduit $0_M \otimes n = (0_K m) \otimes n = 0_K(m \otimes n) = 0$, i.e.

$$0 \otimes n = m \otimes 0 = 0.$$

Si l'on reprend le problème que l'on s'était posé en début de chapitre, étant donnée une application bilinéaire.

$$\varphi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & R \\ (m, n) & \longmapsto & \varphi(m, n) \end{cases}$$

on a bien une unique application linéaire

$$\bar{\varphi} : \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow & R \\ m \otimes n & \longmapsto & \varphi(m, n) \end{cases}$$

i.e., telle que $\bar{\varphi} \circ \pi(m, n) = \varphi(m, n)$ pour tout (m, n) de $M \times N$.

L'unicité de $\overline{\varphi}$ vient de sa linéarité et de ce que les $m \otimes n$ engendrent $M \otimes N$, le point important est surtout son existence.

En effet, si l'on voulait définir $\overline{\varphi}$, il faudrait vérifier que $\varphi(m, n)$ ne dépend pas du représentant $m \otimes n$ choisi, et donc redire à chaque fois que φ passe au quotient par l'idéal F .

C'est ce que l'on appelle la **propriété universelle du produit tensoriel**.

On dit aussi que φ se factorise en $\overline{\varphi} \circ \pi$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & R \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \overline{\varphi} & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

On remarquera de plus que le produit tensoriel ne dépend que de la structure des espaces vectoriels considérés, en cela que :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \simeq M' \\ N \simeq N' \end{array} \right\} \implies M \otimes N \cong M' \otimes N'.$$

En effet, si $\left\{ \begin{array}{l} \mu : M \longrightarrow M' \\ \nu : N \longrightarrow N' \end{array} \right.$ sont des isomorphismes, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} M \times N & \longrightarrow M' \otimes N' \\ (m, n) & \longmapsto \mu(m) \otimes \nu(n) \end{array} \right.$$

est bilinéaire, donc la propriété universelle nous donne une application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ll} M \otimes N & \longrightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n & \longmapsto \mu(m) \otimes \nu(n) \end{array} \right.$$

De même, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} M' \times N' & \longrightarrow M \otimes N \\ (m', n') & \longmapsto \mu^{-1}(m') \otimes \nu^{-1}(n') \end{array} \right.$$

est bilinéaire, donc la propriété universelle nous donne une application linéaire

$$\Psi : \begin{cases} M' \otimes N' & \longrightarrow & M \otimes N \\ m' \otimes n' & \longmapsto & \mu^{-1}(m') \otimes \nu^{-1}(n') \end{cases}$$

Il est alors clair que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, donc sont des isomorphismes.

D'autre part, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}(M \otimes N, R) & \longrightarrow & Bil(M, N; R) \\ \Phi & \longmapsto & (m, n) \mapsto \Phi(m \otimes n) \end{cases}$$

est bien définie, linéaire, injective (la connaissance des images par Φ des éléments de la base $m \otimes n$ de $M \otimes N$ détermine uniquement Φ), et surjective ($Bil(M, N; R)$ a un antécédent $\overline{\varphi}$), donc est un isomorphisme.

Enfin, l'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(N, R)) & \longrightarrow & Bil(M, N; R) \\ \Phi & \longmapsto & (m, n) \mapsto [\Phi(m)](n) \end{cases}$$

est bien définie, linéaire, injective, surjective (tout φ de $Bil(M, N; R)$ a un antécédent $m \mapsto \varphi(m, .)$), donc est un isomorphisme.

On en conclut que

$$\mathcal{L}(M \otimes N, R) \cong Bil(M, N; R) \cong \mathcal{L}(M, \mathcal{L}(N, R)).$$

Remarque 1.2

Les tenseurs purs $m \otimes n$ engendrent l'espace vectoriel $M \otimes N$.

Mais tous les éléments de $M \otimes N$ ne sont pas des tenseurs purs : ce sont une somme des tenseurs purs $\sum_i m_i \otimes n_i$.

Propriété 1.1 (*commutativité, associativité et élément neutre pour le produit tensoriel*).

Soient M, N, R des K -espaces vectoriels.

- a) Les K -espaces vectoriels $M \otimes N$ et $N \otimes M$ sont canoniquement identifiables via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{\sim} & N \otimes M \\ m \otimes n & \mapsto & n \otimes m \end{array}$$

- b) Les K -espaces vectoriels $(M \otimes N) \otimes R$ et $M \otimes (N \otimes R)$ sont canoniquement identifiés via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes N) \otimes R & \xrightarrow{\sim} & M \otimes (N \otimes R) \\ (m \otimes n) \otimes p & \mapsto & m \otimes (n \otimes p) \end{array}$$

- c) Les K -espaces vectoriels $M, M \otimes K$ et $K \otimes M$ sont canoniquement identifiés via les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & M \otimes K \\ m & \mapsto & m \otimes 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & K \otimes M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m \end{array}$$

Preuve.

- a) On considère l'application bilinéaire

$$\varphi : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & N \otimes M \\ (m, n) & \longmapsto & n \otimes m \end{cases}$$

Par la propriété universelle, il existe une application linéaire

$$\bar{\varphi} : \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow & N \otimes M \\ m \otimes n & \longmapsto & \varphi(m, n) = n \otimes m \end{cases}$$

Un tel $\overline{\varphi}$ est bijectif et est unique car les images des $m \otimes n$ déterminent entièrement une application linéaire sur $M \otimes N$.

b) À r fixé on considère l'application bilinéaire

$$\varphi_r : \begin{cases} M \times N & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ (m, n) & \longmapsto & m \otimes (n \otimes r) \end{cases}$$

Par la propriété universelle, il existe une application linéaire

$$\overline{\varphi}_r : \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ m \otimes n & \longmapsto & m \otimes (n \otimes r) \end{cases}$$

On remarque alors que $r \mapsto \overline{\varphi}_r$ est linéaire, donc l'application

$$\Phi : \begin{cases} (M \otimes N) \otimes R & \longrightarrow & M \otimes (N \otimes R) \\ \xi \otimes r & \longmapsto & \overline{\varphi}_r(\xi) \end{cases}$$

est également linéaire, avec $\Phi((m \otimes n) \otimes r) = m \otimes (n \otimes r)$.

De façon analogue, en se fixant m , l'application bilinéaire

$$\psi_m : \begin{cases} N \times R & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ (n, r) & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes r \end{cases}$$

se factorise en

$$\overline{\psi}_m : \begin{cases} N \otimes R & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ n \otimes r & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes r \end{cases}$$

puis $m \mapsto \overline{\psi}_m$ est linéaire, donc

$$\Psi : \begin{cases} M \otimes (N \otimes R) & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes R \\ m \otimes \xi & \longmapsto & \overline{\psi}_m(\xi) \end{cases}$$

est également linéaire, avec $\Psi(m \otimes (n \otimes r)) = (m \otimes n) \otimes r$.

On voit alors facilement que Ψ et Φ sont réciproques l'une de l'autre.

Donc sont des isomorphismes. Concernant l'unicité, il suffit de dire que les images des tenseurs purs déterminent une application linéaire.

c) On considère d'une part l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} K \times M \longrightarrow M \\ (k, m) \longmapsto km \end{array} \right. \text{ bilinéaire qui se factorise en.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K \otimes M \longrightarrow M \\ k \otimes m \longmapsto km \end{array} \right.$$

d'autre part l'application linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} M \longrightarrow K \otimes M \\ m \longmapsto 1 \otimes m \end{array} \right.$$

lesquelles sont clairement linéaires et réciproques l'une de l'autre.

Pour montrer l'unicité, quitte à se répéter, on n'oublie pas que les images des tenseurs purs déterminent entièrement une application linéaire. ■

1.4 Produit tensoriel d'applications linéaires

Définition 1.1

Soient M, N, M', N' des espaces vectoriels, et $\left\{ \begin{array}{l} f : M \longrightarrow M' \\ g : N \longrightarrow N' \end{array} \right.$ des applications linéaires.

On appelle produit tensoriel de f et g l'unique application linéaire

$$f \otimes g : \left\{ \begin{array}{l} M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n \longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{array} \right.$$

Preuve. de l'existence et de l'unicité de $f \otimes g$.

$$\text{L'application } \left\{ \begin{array}{l} M \times N \longrightarrow M' \otimes N' \\ (m, n) \longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{array} \right. \text{ se factorise en.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n \longmapsto f(m) \otimes g(n) \end{array} \right.$$

d'où l'existence de $f \otimes g$.

L'unicité vient (comme toujours) de ce que les $m \otimes n$ engendrent $M \otimes N$. ■

Propriété 1.2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ Id_{N'} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} Id_M \\ \otimes \\ g' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{M'} \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ Id_N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f \circ f' \\ \otimes \\ g \circ g' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f \\ \otimes \\ g \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f' \\ \otimes \\ g' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Preuve.

On vérifie les égalités sur les tenseurs purs. ■

1.5 Distributivité du produit tensoriel sur les sommes directes

Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(N_j)_{j \in J}$ deux familles de K -espaces vectoriels.

$$\text{On pose } \begin{cases} M = \prod_{i \in I} M_i \\ N = \prod_{j \in J} N_j \end{cases}.$$

On peut former le produit cartésien $\prod_{i, j} (M_i \otimes N_j)$.

On dispose via la propriété universelle d'une application K -linéaire.

$$\Pi : \begin{cases} M \otimes N & \longrightarrow \prod_{i, j} M_i \otimes N_j \\ (x_i) \otimes (y_j) & \longmapsto (x_i \otimes y_j) \end{cases}$$

Remarque 1.3

Il n'est en général ni injectif, ni surjectif.

La non-surjectivité est montrée via un argument de dualité et la non-injectivité à l'aide de calculs de produits tensoriels de quotients.

Il n'est donc sûrement pas bijectif, ce qui s'écrit aussi

$$\left(\prod_{i \in I} M_i \right) \otimes \left(\prod_{j \in I} N_j \right) \not\cong \prod_{i, j} (M_i \otimes N_j).$$

Par conséquent, le produit tensoriel ne se distribue pas sur le produit cartésien.

En revanche, si l'on ne regarde dans les produits cartésiens que les familles à support fini, i.e., si l'on remplace les \prod par des \bigoplus , on va obtenir un isomorphisme

$$\left(\bigoplus M_i \right) \otimes \left(\bigoplus N_j \right) \cong \bigoplus (M_i \otimes N_j).$$

C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.1 (*distributivité de \otimes sur \oplus*).

Il y a un isomorphisme canonique de K -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} N_j \right) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i, j} (M_i \otimes N_j) \\ (\sum x_i) \otimes (\sum y_j) &\longmapsto \sum_{i, j} (x_i \otimes y_j) \end{aligned}$$

Preuve.

Notons $\begin{cases} M' = \bigoplus_{i \in I} M_i \\ N' = \bigoplus_{j \in J} N_j \end{cases}$ les sous espaces vectoriels de M et N des familles à support fini.

On dispose d'une injection canonique (linéaire)

$$\begin{cases} M' \otimes N' &\hookrightarrow M \otimes N \\ (x_i) \otimes (y_j) &\longmapsto (x_i) \otimes (y_j) \end{cases},$$

qui, composée avec

$$\Pi : \begin{cases} M \otimes N &\longrightarrow \prod_{i, j} (M_i \otimes N_j) \\ (x_i) \otimes (y_j) &\longmapsto (x_i \otimes y_j) \end{cases}$$

donne une application linéaire

$$\Phi : \begin{cases} M' \otimes N' & \longrightarrow \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes N_j) \\ (x_i)_i \otimes (y_j)_j & \longmapsto (x_i \otimes y_j)_{i,j} \end{cases}$$

bien définie puisque l'image d'un élément $(x_i)_i \otimes (y_j)_j$ de $M' \otimes N'$ par Φ est une famille à support fini dans $I \times J$.

On construit une réciproque à Φ sur chacune des composantes de $\bigoplus_{i,j} (M_i \otimes N_j)$.

À (i, j) fixé, on a (par la propriété universelle) une application linéaire

$$\psi_{i,j} : \begin{cases} M_i \otimes N_j & \longrightarrow M' \otimes N' \\ x \otimes y & \longmapsto x \otimes y \end{cases}.$$

En recollant les $\psi_{i,j}$, on obtient une application linéaire

$$\Psi : \begin{cases} \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes N_j) & \longrightarrow M' \otimes N' \\ \sum_{i,j} (x_i \otimes y_j) & \longmapsto \sum_{i,j} \psi_{i,j} (x_i \otimes y_j) \end{cases}$$

Le terme $\sum_{i,j} \psi_{i,j} (x_i \otimes y_j)$ ci-dessus se simplifie en utilisant la bilinéarité de \otimes dans $M' \otimes N'$:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \psi_{i,j} (x_i \otimes y_j) &= \sum_{i,j} x_i \otimes y_j = \sum_j \sum_i x_i \otimes y_j = \sum_j \left(\sum_i x_i \right) \otimes y_j \\ &= \left(\sum_i x_i \right) \otimes \left(\sum_j y_j \right). \end{aligned}$$

En se rappelant $\Phi : \begin{cases} M' \otimes N' & \longrightarrow \bigoplus_{i,j} (M_i \otimes N_j) \\ (\sum x_i) \otimes (\sum y_j) & \longmapsto \sum_{i,j} (x_i \otimes y_j) \end{cases}$ on voit clairement que Ψ est la réciproque de Φ , ce qui conclut. ■

1.6 Produit tensoriel d'espaces vectoriels munies de bases

Corollaire 1.1

Soient M et N deux K -espaces vectoriels.

1 Si $(f_j)_{j \in J}$ une base de N , alors tout élément de $M \otimes N$ s'écrit de façon unique

$$\sum_{j \in J}^{finie} m_j \otimes f_j .$$

$M \otimes N$ se comporte ainsi comme un M -espace vectoriel.

2 Si de plus (e_i) une base de M , alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ une base de $M \otimes N$, et

$$\dim (M \otimes N) = \dim (M) \dim (N) .$$

1.7 Produit tensoriel des matrices

Intéressons-nous maintenant à l'effet du produit tensoriel sur les matrices.

Proposition 1.2

Soient M, N deux K -espaces vectoriels de bases $B = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$,

$B' = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ de dimension m, n respectivement.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(M) \\ g \in \mathcal{L}(N) \end{array} \right. \text{ deux endomorphismes et } \left\{ \begin{array}{l} X = \text{Mat}_{(e_i)} f = (a_{i,j}) \\ Y = \text{Mat}_{(f_j)} g = (b_{i,j}) \end{array} \right. .$$

a) Si on ordonne lexicographiquement la base canonique de $M \otimes N$ en

$$e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n,$$

$$e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_n,$$

...

$$e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n,$$

on a alors, dans cette base :

$$Mat (f \otimes g) = \begin{pmatrix} a_{1,1}Y & \cdots & a_{1,m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}Y & \cdots & a_{m,m}Y \end{pmatrix}$$

(on part de la matrice X , et on multiplie chacun de ses coefficients par Y).

b) Si on ordonne anti-lexicographiquement la base canonique de $M \otimes N$ en

$$e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_1, \dots, e_m \otimes f_1,$$

$$e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_2,$$

...

$$e_1 \otimes f_n, e_2 \otimes f_n, \dots, e_m \otimes f_n,$$

on a alors, dans cette base :

$$Mat (f \otimes g) = \begin{pmatrix} b_{1,1}X & \cdots & b_{1,n}X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}X & \cdots & b_{n,n}X \end{pmatrix}$$

(on part de la matrice Y , et on multiplie chacun de ses coefficients par X).

Preuve.

a) Notons Z la matrice de $f \otimes g$ dans la base considérée (ordre lexicographique) et fixons un couple d'indices (i_0, j_0) . Si l'on regarde la matrice $n \times n$ extraite de Z correspondant aux lignes $(e_{i_0} \otimes f_k)_{k=1, \dots, n}$ et aux colonnes $(e_{j_0} \otimes f_l)_{l=1, \dots, n}$, que nous noterons Z^{i_0, j_0} , on a

$$\begin{aligned} [Z^{i_0, j_0}]_{k, l} &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } [f \otimes g](e_{j_0} \otimes f_l) \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } f(e_{j_0}) \otimes g(f_l) \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } \sum_{p=1}^m a_{p, j_0} e_p \otimes \sum_{q=1}^n b_{q, l} f_q \\ &= \text{coef en } (e_{i_0} \otimes f_k) \text{ dans } \sum_{p, q} a_{p, j_0} b_{q, l} (e_p \otimes f_q) \\ &= a_{i_0, j_0} b_{k, l}, \end{aligned}$$

d'où $Z^{i_0, j_0} = a_{i_0, j_0} Y$.

b) Notons Z la matrice de $f \otimes g$ dans la base considérée (ordre anti-lexicographique) et fixons un couple d'indices (k_0, l_0) . Si l'on regarde la matrice $n \times n$ extraite de Z correspondant aux lignes $(e_i \otimes f_{k_0})_{i=1, \dots, m}$ et aux colonnes $(e_j \otimes f_{l_0})_{j=1, \dots, m}$, que nous noterons Z^{k_0, l_0} , on a

$$\begin{aligned}
[Z^{k_0, l_0}]_{i, j} &= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } [f \otimes g](e_j \otimes f_{l_0}) \\
&= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } f(e_j) \otimes g(f_{l_0}) \\
&= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } \sum_{p=1}^m a_{p, j} e_p \otimes \sum_{q=1}^n b_{q, l_0} f_q \\
&= \text{coef en } (e_i \otimes f_{k_0}) \text{ dans } \sum_{p, q} a_{p, j} b_{q, l_0} (e_p \otimes f_q) \\
&= a_{i, j} b_{k_0, l_0},
\end{aligned}$$

d'où $Z^{i_0, j_0} = b_{k_0, l_0} X$. ■

Corollaire 1.2

$$\begin{aligned}
\text{tr}(f \otimes g) &= \text{tr}(f) \text{tr}(g) \\
\det(f \otimes g) &= \det(f)^{\text{rg } N} \det(g)^{\text{rg } M}.
\end{aligned}$$

Preuve.

On évalue la trace dans une des deux bases précédemment considérées :

$$\begin{aligned} \text{tr} (f \otimes g) &= \text{tr} (A \otimes B) = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,m}B \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr} (a_{i,i}B) = \sum_{i=1}^m a_{i,i} \text{tr} (B) = \text{tr} A \text{tr} B \end{aligned}$$

et on procède de même pour le déterminant en utilisant les deux bases :

$$\begin{aligned} \det (f \otimes g) &= \det (f \otimes Id \otimes Id \otimes g) = \det (f \otimes Id) \det (Id \otimes g) \\ &= \det \begin{pmatrix} [I_n]_{1,1}A & \cdots & [I_n]_{1,n}A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [I_n]_{n,1}A & \cdots & [I_n]_{n,n}A \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} [I_m]_{1,1}B & \cdots & [I_m]_{1,m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [I_m]_{m,1}B & \cdots & [I_m]_{m,m}B \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)^n (\det B)^m \end{aligned}$$

■

1.8 Quelques exemples

1) Produit tensoriel de deux vecteurs :

Soit M, N deux K -espaces vectoriels.

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de M, N respectivement tels que

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

Produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Tr} (\vec{u} \otimes \vec{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

2) Produit tensoriel de deux matrices :

Soient M, N, M', N' des K -espaces vectoriels des matrices A, B, C, H respectivement.

a) Soient A et B deux matrices carrées d'ordres 2, telles que.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 1 \times 2 & 1 \times 4 & 2 \times 2 & 2 \times 4 \\ 3 \times 1 & 3 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 & 1 \times 2 & 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Soient C et H deux matrices telles que $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$C \otimes H = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3) Base de produit tensoriel :

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et de base $B' = (e_1, \dots, e_n)$.

a) $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de base $B = \{e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1\}$.

b) $\dim V = 2$, $B = (e_1, e_2)$.

Une base de $\otimes^2 V = V \otimes V$, est donnée par :

$$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2.$$

$$\dim \otimes^2 V = 2 \times 2 = 4.$$

c) Une base de $\otimes^3 V = V \otimes V \otimes V$, est donnée par : $e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \otimes e_2$

$$\dim \otimes^3 V = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

4) Algèbre des quaternions

On appelle algèbre des quaternions, et on note \mathbb{H} , l'algèbre (associative mais non

commutative) de dimension 4 sur \mathbb{R} engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (on vérifiera que ces relations donnent bien une algèbre de dimension 4), alors $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

D'abord \mathbb{H} a bien la dimension annoncée : elle a une base comme \mathbb{R} -espace vectoriel formée des quatre éléments $1, i, j, k$ puisque tout produit de deux tels éléments s'exprime comme combinaison des autres (par exemple $ij = k$ car $ij = -ij$ (k^2) = $-(ijk)k = k$). Ensuite, on vérifie facilement que $(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, ce qui montre que tout quaternion $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ non nul admet un inverse (à savoir $\frac{1}{N}(\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k)$ où $N = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ vérifie $N \neq 0$ dans \mathbb{R}), donc \mathbb{H} est bien une algèbre à divisions.

Le produit tensoriel $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendré par les mêmes générateurs et relations, sur \mathbb{C} cette fois. Montrons donc qu'on peut trouver trois matrices $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\sigma_i^2 = \sigma_j^2 = \sigma_k^2 = \sigma_i \sigma_j \sigma_k = -1$ et qui engendrent $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre (pour cela, il suffit bien sûr qu'avec l'identité elles l'engendrent en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel). On prend

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_k = \sigma_i \sigma_j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et on a bien les relations souhaitées, comme on le vérifie immédiatement.

5)

5.1 Soit B une K -algèbre, si $B \neq 0$, alors $B \otimes_K B \neq 0$.

L'application K -bilinéaire φ :

$$\begin{array}{ccc} B \times B & \longrightarrow & B \\ \varphi : (x, y) & \longrightarrow & xy = \varphi(x, y) \end{array}$$

définit une application linéaire $\overline{\varphi}$.

$$\begin{array}{ccc} B \otimes B & \longrightarrow & B \\ \overline{\varphi} : x \otimes y & \longrightarrow & \overline{\varphi}(x \otimes y) = \varphi(x, y) = xy \end{array}$$

or $\overline{\varphi}(1 \otimes 1) = \varphi(1, 1) = 1 \in B \neq 0 \implies B \otimes_K B \neq 0$.

5.2

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$z \otimes 1 \longrightarrow (z, z)$$

$$z \otimes i \longrightarrow (zi, -zi)$$

$$z \otimes z' \longrightarrow (zz', z\overline{z'})$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ (z, z') & \longrightarrow & (zz', z\overline{z'}) \end{array}$ est bilinéaire, qui définit une application

linéaire $\overline{\varphi} :$

$$\overline{\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ (z, z') & \longrightarrow & \overline{\varphi}(z, z') = \varphi(z, z') \end{array} \quad \text{bijective}$$

5.3

$$E^* \otimes F \cong \mathcal{L}(E, F)$$

$$f \otimes y \longrightarrow x \mapsto f(x)y$$

$$E^* \otimes F^* \cong \left(E \otimes_K F \right)^*$$

$$f \otimes g \longrightarrow x \otimes y \mapsto f(x)g(y)$$

5.4

$$\text{End}(E) \otimes_K \text{End}(F) \cong \text{End}(E \otimes F)$$

$$f \otimes g \longrightarrow x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$$

5.5 Soit E et F deux espaces vectoriels sur K .

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \otimes E \\ (x, y) & \longrightarrow & \varphi(x, y) = y \otimes x \end{array}$ est bilinéaire, qui définit une application linéaire

$$\phi : \begin{array}{ccc} E \otimes F & \longrightarrow & F \otimes E \\ x \otimes y & \longrightarrow & \phi(x \otimes y) = y \otimes x = \varphi(x, y) \end{array}$$

ϕ est bijectif car involutif : $\phi \circ \phi = id$ i.e, $\phi^{-1} = \phi$.

D'où $E \otimes F \cong F \otimes E$.

6) Tout groupe commutatif G est un \mathbb{Z} -module :

$(G, +)$ est un groupe commutatif.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} \times G &\longrightarrow G \\
(\alpha, x) &\longrightarrow \alpha \cdot x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\alpha \text{ fois}} \\
\alpha \cdot (\beta \cdot x) &= (\alpha\beta) \cdot x. \\
(\alpha + \beta) \cdot x &= \alpha \cdot x + \beta \cdot x. \\
\alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y. \\
1 \cdot x &= x.
\end{aligned}$$

On considère les \mathbb{Z} -modules $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, alors :

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$$

où $a \wedge b = p.g.c.d (a, b)$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z} \\ (\bar{n}_a, \bar{m}_b) & \longrightarrow & \bar{n}\bar{m}_{a \wedge b} \end{array}$ est bilinéaire, qui définit une application linéaire

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z} \\
\bar{n}_a \otimes \bar{m}_b &\longrightarrow \bar{n}\bar{m}_{a \wedge b}
\end{aligned}$$

ϕ est bijectif car $\phi(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \bar{1}$.

D'où $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a \wedge b\mathbb{Z}$.

Remarque :

Si $a \wedge b = 1$ i.e., a et b sont premiers entre eux :

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{\bar{0}\} = 0.$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \cong 0, \text{ car } 3 \wedge 11 = 1.$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ car } 2 \wedge 2 = 2.$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \text{ car } 3 \wedge 6 = 3.$$

Chapitre 2

Produit extérieur d'un K - espace vectoriel

2.1 Lien avec les applications multilinéaires alternées

Voyons à présent comment représenter linéairement les applications multilinéaires alternées.

Définition 2.1

Soit M un K -espace vectoriel. Pour chaque entier r , posons

$$T^r(M) = \bigotimes_{i=1}^r M, \quad T^0(M) = K, \quad T^1(M) = M \text{ et } T^2(M) = M \otimes M.$$

$T^r(M) = M \otimes \cdots \otimes M$ (le produit tensoriel r fois).

Le produit tensoriel étant associatif, on obtient une application bilinéaire

$$T^r(M) \times T^s(M) \longrightarrow T^{r+s}(M)$$

qui associative. On peut ainsi, par de cette application bilinéaire, définir une structure de corp sur la somme directe

$$T(M) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(M) = K \otimes M \oplus M \otimes M \oplus \dots$$

et même une structure d'algèbre (en identifiant K à $T^0(M)$).

On appelle $T(M)$ l'algèbre tensorielle de M sur K .

Pour $x, y \in T(M)$, on notera encore $x \otimes y$ la multiplication d'anneau de $T(M)$.

Une application linéaire $f : M \longrightarrow F$ induit, pour tout $r \geq 0$, une application linéaire

$$T^r(f) : T^r(M) \longrightarrow T^r(F)$$

qui à son tour induit une application sur $T(M)$, notée $T(f)$. Il est clair que $T(f)$ est l'unique application linéaire telle que, pour $x_1, \dots, x_r \in M$, on ait

$$T(f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_r).$$

En effet, les éléments de $T^1(M) = M$ sont les générateurs de l'algèbre $T(M)$ sur K . On voit que $T(f)$ est un homomorphisme d'algèbre.

Nous pouvons déterminer complètement la structure de $T(M)$. Soit J_n le sous espace vectoriel de $T^n(M)$ engendré par les tenseurs purs $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ ayant au moins deux composantes $x_i = x_j$ égales.

Noter au passage que $J_0 = J_1 = \{0\}$ (pas possible d'avoir deux composantes, a fortiori deux composantes égales).

On pose

$$J = \bigoplus_{n \geq 0} J_n$$

Définition 2.2

Une forme n -linéaire $\varphi : M^n \longrightarrow K$ est dite alternée si

$$\varphi(\dots, m, \dots, m, \dots) = 0$$

On notera $\mathcal{L}K_n(M, K)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées.

Proposition 2.1

Si φ est n -linéaire alternée, alors

$$\varphi (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\varphi (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

Preuve.

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi (\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) \\ &= \underbrace{\varphi (\dots, x_i, \dots, x_i, \dots)}_{=0} + \underbrace{\varphi (\dots, x_j, \dots, x_j, \dots)}_{=0} \\ &\quad + \varphi (\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi (\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.1

Si φ est n -linéaire alternée, alors

$$\varphi (m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n)}) = \varepsilon (\sigma) \varphi (m_1, \dots, m_n), \text{ où } \sigma \in S_n.$$

Preuve.

S_n est engendré par les transpositions. ■

Proposition 2.2

J est un idéal bilatère homogène de $T(M)$.

Preuve.

J est déjà stable par $+$ et contient 0. D'autre part, puisque $T(M)$, est engendré par K et les

$$\tau = m_1 \otimes \dots \otimes m_k \quad (k \geq 1)$$

et J par les

$$\iota = m'_1 \otimes \dots \otimes m'_k \quad (k \geq 2, \exists m'_i = m'_j),$$

il suffit de montrer que, pour de tels τ et ι , $\tau \times \iota$ et $\iota \times \tau$ restent dans J , ou, c'est évident puisque les coordonnées identiques de ι sont conservées par multiplication (on concatène).

Le caractère homogène de J est évident. ■

Définition 2.3

On appelle algèbre extérieure de M l'algèbre quotient

$$\Lambda(M) = T(M) / J$$

On notera \wedge le produit dans $\Lambda(M)$, de sorte que

$$\overline{m_1 \otimes \cdots \otimes m_n} = m_1 \wedge \cdots \wedge m_n.$$

Remarque 2.1

Dans l'algèbre $\Lambda(M)$, un produit des éléments de M s'annulera dès que l'un de ces éléments est répété.

Changer l'ordre dans un produit ne fait que changer le signe du produit.

Propriété 2.1

a) $\Lambda(M)$ est une algèbre engendrée par M

$$\Lambda^k(M) = T^k(M) / J_k = \{m_1 \wedge \cdots \wedge m_k\}_{m \in M} \cong T^k(M) / J_k$$

b) La projection canonique

$$\pi : \begin{cases} T(M) & \twoheadrightarrow & \Lambda(M) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \longmapsto & m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \end{cases}$$

est un morphisme qui injecte naturellement M dans $\Lambda(M)$:

$$M \hookrightarrow \Lambda(M).$$

Preuve.

a) Il est clair que $\Lambda(M)$ est une algèbre engendrée par les tenseurs simples $m \in M$.

b) Par définition du produit sur $\Lambda(M)$, la projection canonique envoie clairement $T^n(M)$ dans $\Lambda^n(M)$, donc est un morphisme.

On peut reformuler en ces termes :

$\Lambda(M)$ est une algèbre sur $\Lambda^0 = K$ engendrée par $\Lambda^1 = M$.

■

Proposition 2.3

Pour tous x et y dans M , on a

$$y \wedge x = -x \wedge y.$$

Preuve.

Il suffit d'écrire $0 = (x + y) \wedge (x + y) = \underbrace{x \wedge x}_{=0} + x \wedge y + y \wedge x + \underbrace{y \wedge y}_{=0} = x \wedge y + y \wedge x$.

Changer l'ordre dans un produit ne fait que changer le signe du produit. ■

Corollaire 2.2

Soient x_1, \dots, x_n dans M , σ dans S_n (S_n group de permutation). Alors

$$x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) x_1 \wedge \dots \wedge x_n. \quad (\varepsilon(\sigma) = 1 \text{ ou } -1)$$

Preuve.

Évident car S_n est engendrée par les transpositions. ■

Corollaire 2.3

$\Lambda(M)$ est une algèbre alternée, i.e., si $x \in \Lambda(M)$, $x^2 = x \wedge x = 0$.

Proposition 2.4

Soient M, N deux espaces vectoriels et $u : M \longrightarrow N$ linéaire.

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\Lambda(u) : \begin{cases} \Lambda(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_n & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_n) \end{cases},$$

et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(M) & \xrightarrow{\Lambda(u)} & \Lambda(N) \end{array}.$$

De plus, si $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$, alors

$$\Lambda(v \circ u) = \Lambda(v) \circ \Lambda(u).$$

Preuve.

On construit $\Lambda(u)$ sur les composantes homogènes $\Lambda^k(M)$ de $\Lambda(M)$.

On part de l'application linéaire

$$\begin{cases} T^k(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \otimes \cdots \otimes m_k & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_k) \end{cases}$$

qui s'annule sur J_k , donc qui passe au quotient en

$$\Lambda^k(u) : \begin{cases} \Lambda^k(M) & \longrightarrow & \Lambda(N) \\ m_1 \wedge \cdots \wedge m_k & \longmapsto & u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_k) \end{cases}.$$

On définit alors $\Lambda(u)$ sur $\Lambda(M)$ par les $\Lambda^k(u)$.

L'unicité vient toujours du caractère générateur des $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$.

Pour avoir $\Lambda(v \circ u)$, il suffit d'invoquer l'unicité en remarquant que $\Lambda(v) \circ \Lambda(u)$ fonctionne. ■

2.2 Algèbre extérieure d'une somme directe finie

Théorème 2.1

Soient M_1, \dots, M_n des K -espaces vectoriels.

On a un isomorphisme canonique d'algèbres :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda (M_1 \oplus \dots \oplus M_n) & \xrightarrow{\sim} & \Lambda (M_1) \otimes \dots \otimes \Lambda (M_n) \\ m_i & \mapsto & 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \\ m_1 \dots m_n & \longleftarrow & m_1 \otimes \dots \otimes m_n \end{array} \right.$$

Corollaire 2.4

Soit M un K -espace vectoriel de base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Alors

$$(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}$$

est une base de $\Lambda^k (M)$ et

$$\dim \Lambda^k (M) = \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

En particulier,

$$\dim \Lambda^n K^n = 1 \text{ et } \dim \Lambda^k M = 0, \text{ si } k > n.$$

Preuve.

Pour un espace vectoriel de dimension 1 on a

$$\Lambda (Ke) \cong K \oplus Ke$$

(en effet, pour $k \geq 2$, les tenseurs purs de $\Lambda^k (Ke)$ contiennent un $e \wedge e$ qui est nul).

On en déduit

$$\begin{aligned} \Lambda (M) &= \Lambda (Ke_1 \oplus \dots \oplus Ke_n) \simeq \bigotimes_{i=1, \dots, n} \Lambda (Ke_i) \stackrel{\text{espaces vectoriels}}{\simeq} \bigotimes_{i=1, \dots, n} (K \oplus Ke_i) \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}} K \otimes \dots \otimes K \otimes Ke_{j_1} \otimes K \otimes \dots \otimes \\ &\quad K \otimes Ke_{j_k} \otimes K \otimes \dots \otimes K \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}} Ke_{j_1} \otimes \dots \otimes Ke_{j_k} \\ &= \bigoplus_{k=0}^n \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} Ke_{j_1} \otimes \dots \otimes Ke_{j_k} \end{aligned}$$

donc $\Lambda^k (M)$ est de base $(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}$, donc de dimension $\binom{n}{k}$. ■

Proposition 2.5

On a un isomorphisme canonique des espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathcal{L}K_n (M, N) &\longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^n (M), N) \\ \varphi &\longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_n \mapsto_f \varphi (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2.3 Déterminant sur le produit extérieur

Soit M un K -espace vectoriel de base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

On rappelle que $\dim \Lambda^n (M) = 1$.

En particulier, tout endomorphisme de $\mathcal{L}(\Lambda^n (M))$ est une homothétie.

Définition 2.4

On appelle déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(M)$ le rapport de l'homothétie $\Lambda^n (u)$, noté

$$\det u \in K.$$

Proposition 2.6

Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ et $(a_{i,j})$ les coefficients de $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} u$. Alors

$$\det u = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Preuve.

On regarde l'image d'un vecteur de base par $\Lambda^n (u)$:

$$\begin{aligned} [\Lambda^n (u)](e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= u(e_1) \wedge \cdots \wedge u(e_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^n k_{i_1,1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n=1}^n k_{i_n,n} e_{i_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n k_{i_1,1} \cdots k_{i_n,n} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \\ &= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}} k_{i_1,1} \cdots k_{i_n,n} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \\ &\quad + \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} \subsetneq \{1, \dots, n\}} k_{i_1,1} \cdots k_{i_n,n} \underbrace{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}}_{= 0 \text{ car } \exists i_k = i_l} \\ &= \sum_{i \in S_n} k_{i_1,1} \cdots k_{i_n,n} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} k_{\sigma(1),1} \cdots k_{\sigma(n),n} (e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} k_{\sigma(1),1} \cdots k_{\sigma(n),n} (\varepsilon(\sigma) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) k_{\sigma(1),1} \cdots k_{\sigma(n),n} \right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Reste à voir l'égalité des deux sommes en faisant un changement de variables $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$.

Le calcul ci-dessus peut se généraliser à un terme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ où p n'est pas nécessairement la dimension de M . ■

Proposition 2.7

Soient $x_1, \dots, x_p \in M$ et $X \in M_{n,p}(K)$ la matrice des x_i dans la base (e_i) . Alors

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = \sum_{I \in B_p} \det(X_{I, \{1, \dots, p\}}) e_I.$$

Proposition 2.8

Soit $u \in \mathcal{L}(M)$ de matrice $X = \text{Mat}_{(e_i)} u$. Alors la matrice de $\Lambda^k(u)$ dans la base $(e_I)_{I \in B_k}$ est

$$\text{Mat}_{(e_I)_{I \in B_k}} \Lambda^k(u) = (\det(X_{I,J}))_{I,J \in B_k}.$$

Proposition 2.9

Pour $u \in \mathcal{L}(M)$ et $\lambda, \eta \in K$, on a

$$\det(\lambda \text{Id} + \mu u) = \sum_{k=0}^n \text{tr}(\Lambda^k(u)) \mu^k \lambda^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{I \in B_k} \det(X_{I,I}) \right) \mu^k \lambda^{n-k}.$$

Conclusion

Au terme de ce travail, nous pouvons dire que le produit tensoriel et extérieur sont des notions d'algèbre multilinéaire nécessaire pour des plusieurs branches mathématiques et physiques : géométrie différentielle, théorie des codes, mécanique des milieux continus, fluides ou solides, en électromagnétisme, relativité générale.

Bibliographie

- [1] **D. Harari**, Cours d'algèbre 1, fait à l'E.N.S. (première année du M.M.F.A.I.) en 2003-2004 et 2004-2005.
- [2] **E.Vieillard-Baron. and all**, *Anneau et corps*, Janvier 2001.
- [3] **H. MATSUMURA**. Commutative Algebra. Benjamin-Cumming, New York, 1980. (Deuxième édition).
- [4] **J.C. Mado**, Cours d'Algèbre, 2002-2003.
- [5] **J.Qurré**, Cours D'algèbre, Université Bretagne Occidentale, 1976.
- [6] **R. Rolland**, Produit tensoriel d'espaces vectoriels, 1 janvier, 2012.
- [7] **S. LANG**, Algèbre, DUNOD, Paris, 2004. (3^e édition révisée).
- [8] **S. MARC**, Algèbre multilinéaire, Produit tensoriel de A -modules. (fichier internet).